Färbungen auf Graphen

Robert Siegfried

Seminar „Algorithmische Graphentheorie“
FH Wedel, 26.06.2003

Agenda

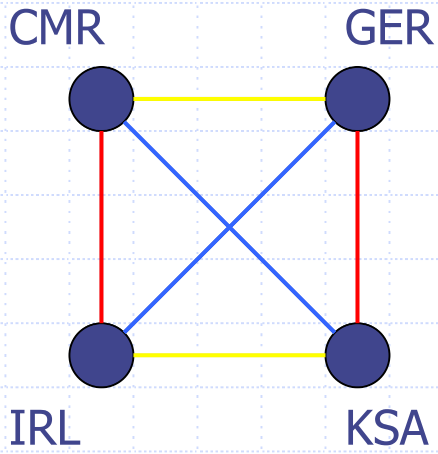
- Einleitung
- Definitionen
- Färben von Landkarten
- Anwendungsbeispiele
- Algorithmen

Einleitung

- Fussball WM 2002 in Japan und Südkorea
- Vorrunde:
  - Deutschland, Kamerun, Irland, Saudi-Arabien
  - Kein Team soll zwei Spiele an einem Tag bestreiten
- Frage: Wieviele Spieltage sind notwendig?

Einleitung

- Der Spielplan als Graph



3 Farben = 3 Spieltage

Agenda

- Einleitung
- **Definitionen**
- Färben von Landkarten
- Anwendungsbeispiele
- Algorithmen

Färbung

Unter der Färbung eines Graphen G=(V,E) versteht man eine Abbildung

$$c: V \to C$$

der Knoten auf eine Menge C von Farben, so dass adjazente Knoten u, v unterschiedlich gefärbt sind:

$$c(u) \neq c(v) \quad \forall \{u, v\} \in E$$

Kantenfärbung

Analog zur Knotenfärbung wird die Kantenfärbung eines Graphen G=(V,E) definiert als Abbildung

$$c: E \rightarrow C$$

der Kanten auf eine Menge C von Farben, so dass adjazente Kanten e, f unterschiedlich gefärbt sind:

$$c(e) \neq c(f) \quad \forall\, e, f \in E \mid e \cap f \neq \{\}$$

Chromatische Zahl $\chi(G)$

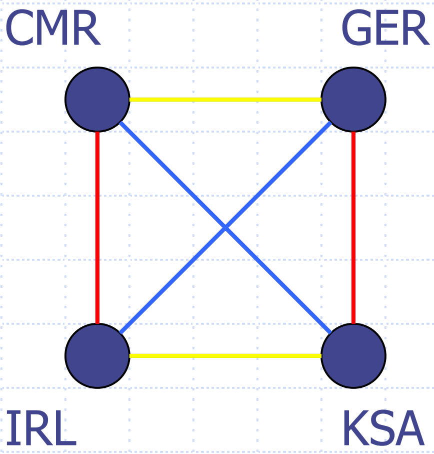
Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die **minimale Anzahl** von Farben die für eine **Knotenfärbung** von G benötigt werden.

Kantenchromatische Zahl $\chi'(G)$

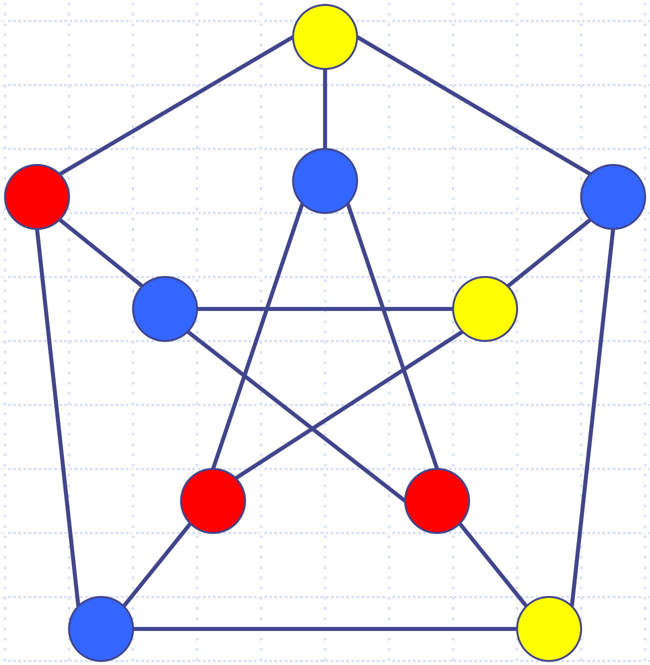
Die **kantenchromatische Zahl** $\chi'(G)$ ist die **minimale Anzahl** von Farben die für eine **Kantenfärbung** von G benötigt werden.

Die **kantenchromatische Zahl** wird auch als **chromatischer Index** bezeichnet.

Beispiele



$\chi'(G) = 3$



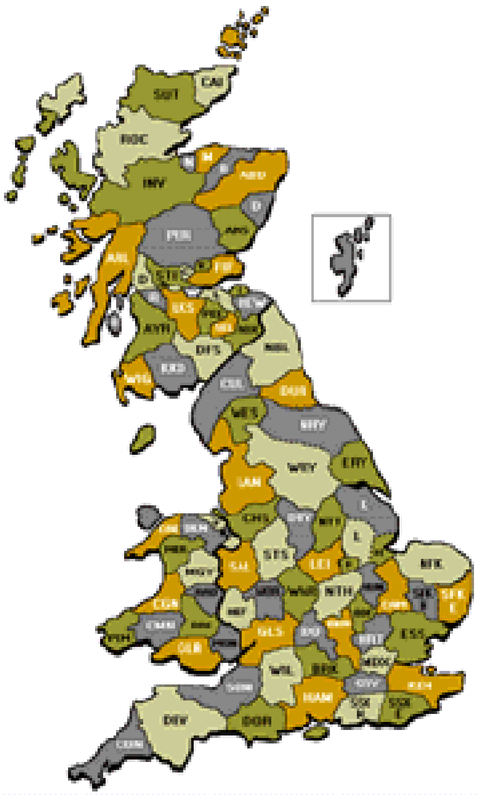
$\chi(G) = 3$

Agenda

- Einleitung
- Definitionen
- **Färben von Landkarten**
- Anwendungsbeispiele
- Algorithmen

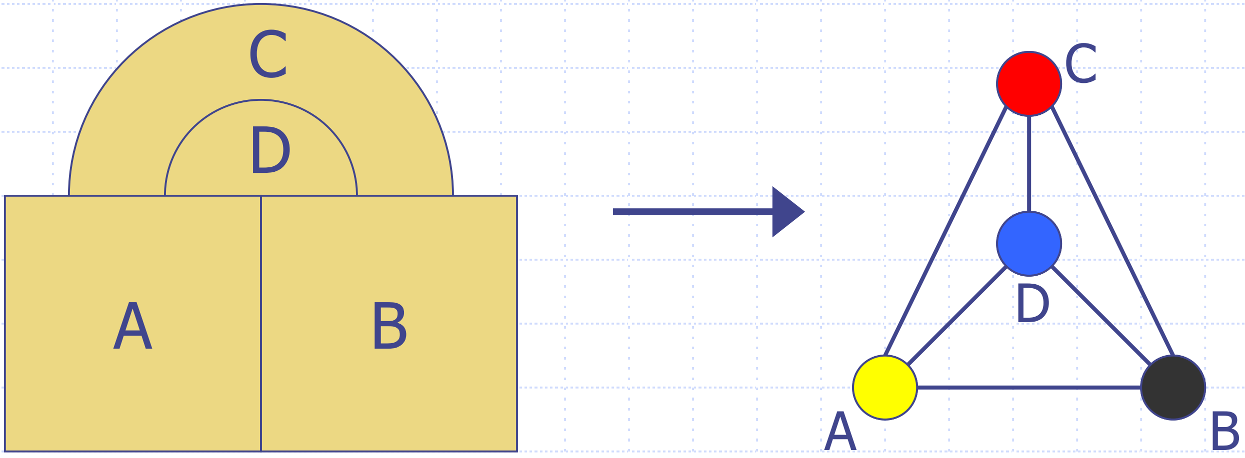
Damals...

- 1852 Francis Guthrie
- Reichen immer 4 Farben aus, um beliebige Landkarten so einzufärben, dass Länder mit gemeinsamen Grenzen unterschiedliche Farben haben?
- Augustus de Morgan nimmt sich der Frage an
- de Morgan konsultiert auch William R. Hamilton



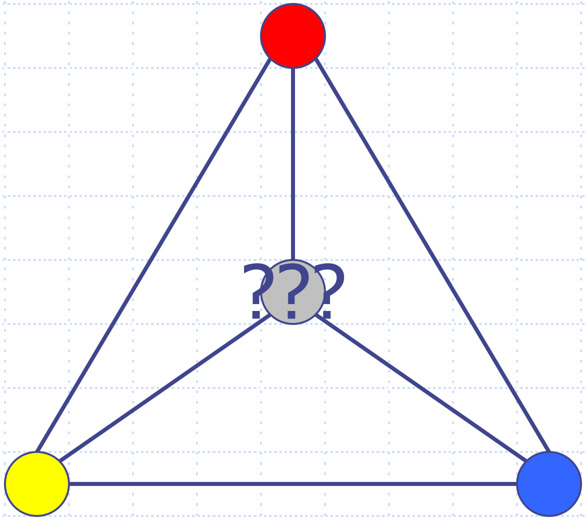
Transformation

- Die Länder werden durch Knoten repräsentiert, wobei benachbarte Länder durch eine Kante verbunden werden.



- Das Einfärben einer Landkarte ist äquivalent zur Bestimmung einer gültigen Färbung eines planaren Graphen.

3 Farben reichen nicht immer!



Chronologie

- 1879: Alfred Kempe zeigt, dass 4 Farben immer ausreichen

6.7.1849 – 21.4.1922, London

Chronologie, II

- 1890: Percy J. Heawood findet einen Fehler in Kempes Beweis, kann aber zeigen, dass 5 Farben immer ausreichen
- 1976: Kenneth Appel und Wolfgang Haken beweisen die 4-Farben-Vermutung

8.9.1861 – 24.1.1955, England

Chronologie, III

- Beweis von Appel & Haken 1976
  - Kompliziert & auf Computer angewiesen
  - Strategie:
    - Alle Graphen auf 1950 „Grundkonfigurationen“ reduzieren
    - Zeigen, dass diese alle 4-färbbar sind
- 1996 verfeinerter Beweis von Robertson, Sanders, Seymour, Thomas
  - „Grundmenge“ der Graphen auf 650 reduziert und weitere Vereinfachungen an der Struktur des Beweises

> „However, an argument can be made that our „proof“ is not a proof in the traditional sense, because it contains steps that can never be verified by humans.“
>
> (aus dem Schlusswort von: „A new proof of the four-colour theorem“, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour, Robin Thomas)

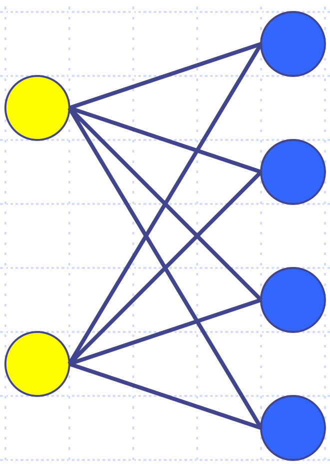
Chronologie, IV

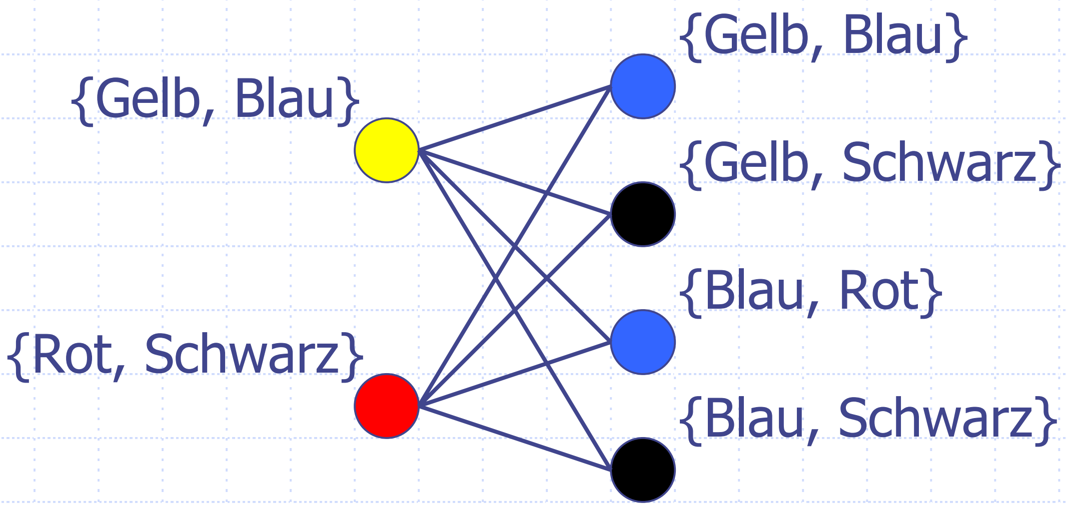
- 1994: neuer Beweis für die 5-Färbbarkeit planarer Graphen von Carsten Thomassen
- Beweis kommt (im Ggs. zu Heawood's) ohne die Eulersche Polyederformel (Knoten-Kanten+Gebiete=2) aus
- 2 Vorbemerkungen
  - Listenfärbungen
  - Ebene Dreiecksgraphen

*22.08.1948, Grindsted, DK

Listenfärbung

C = {Gelb, Blau}

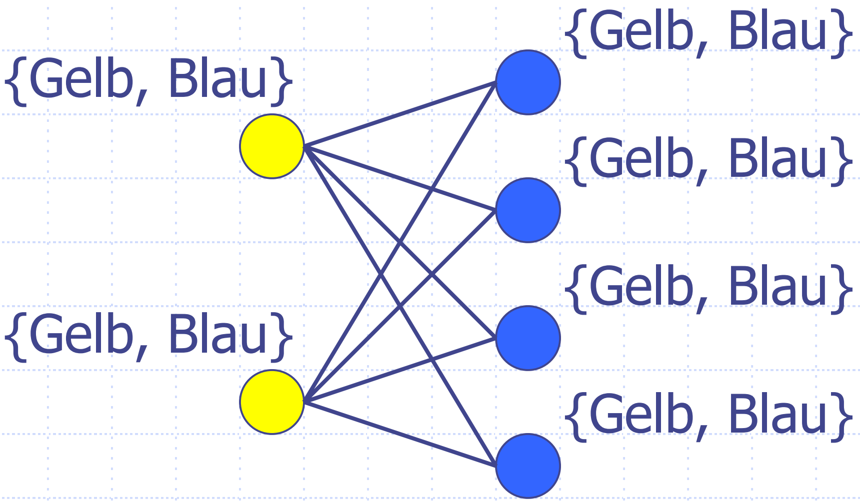




Es gibt für **alle Knoten** eine **Menge C** von Farben.

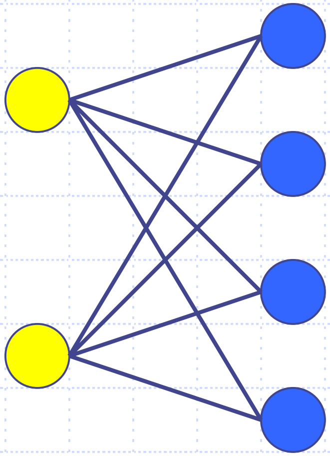
Es gibt zu **jedem Knoten** eine **Liste C(v)** der verfügbaren Farben. Alle Listen haben gleich viele Elemente.

Listenfärbung

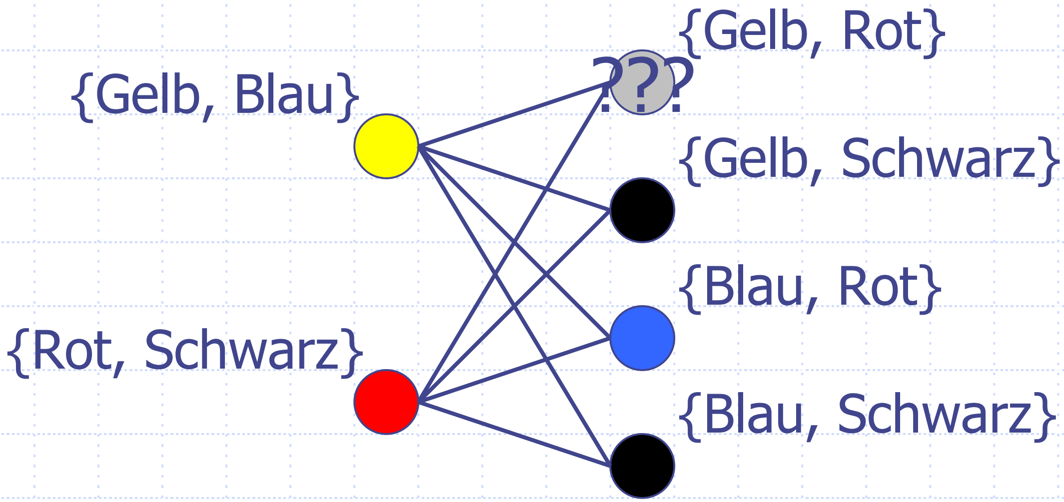


„Normale" Färbung ist lediglich der Sonderfall, dass alle C(v) identisch sind.

Listenfärbung



$\chi\,(G) = 2$

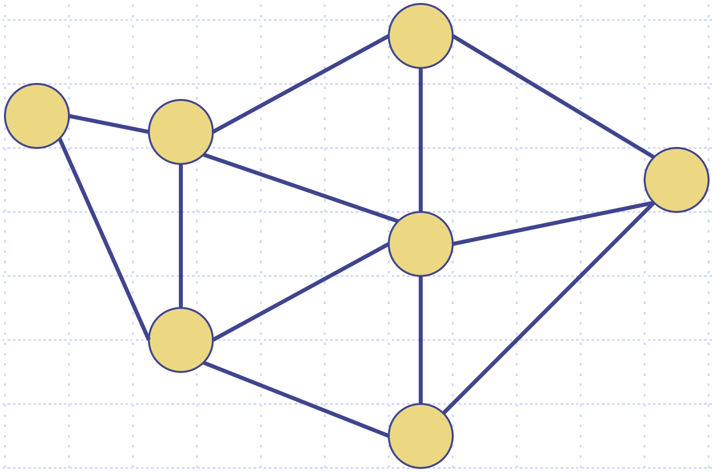


$\chi_l\,(G) > 2$

$$\boxed{\chi_l\,(G) \geq \chi\,(G)}$$

Ebene Dreiecksgraphen

Ein planarer Graph heißt **ebener Dreiecksgraph** bzw. **trianguliert** (engl. „near-triangulated"), wenn alle seine Innengebiete durch **drei Kanten** begrenzt werden.



Beweis von Thomassen, I

- Behauptung:
  „Jeder planare Graph besitzt eine 5-Listenfärbung."
- „Trick":
  Wir beweisen eine stärkere Behauptung.
- Stärkere Behauptung:
  Wir werden zeigen, dass jeder ebene Dreiecksgraph eine 5-Listenfärbung besitzt.

  Da durch das Hinzufügen von Kanten zu einem Graphen die listen-chromatische Zahl lediglich wachsen kann, können wir jeden planaren Graph zu einem ebenen Dreiecksgraph erweitern und mit 5 Farben färben.

Beweis von Thomassen, II

- Induktionsannahme

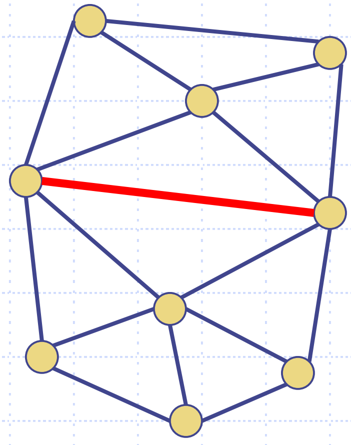
  Es sei G=(V,E) ein ebener Dreiecksgraph. B = $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ soll den Kreis beschreiben, der das Außengebiet begrenzt. Für die Farbenmengen C(v) sollen folgende Annahmen gelten:

  - Die adjazenten Knoten $v_1, v_2 \in B$ sind bereits mit den unterschiedlichen Farben α, β gefärbt.
  - $|C(v)| \geq 3$ für alle anderen Knoten $v \in B$
  - $|C(v)| \geq 5$ für alle Knoten v im Innengebiet

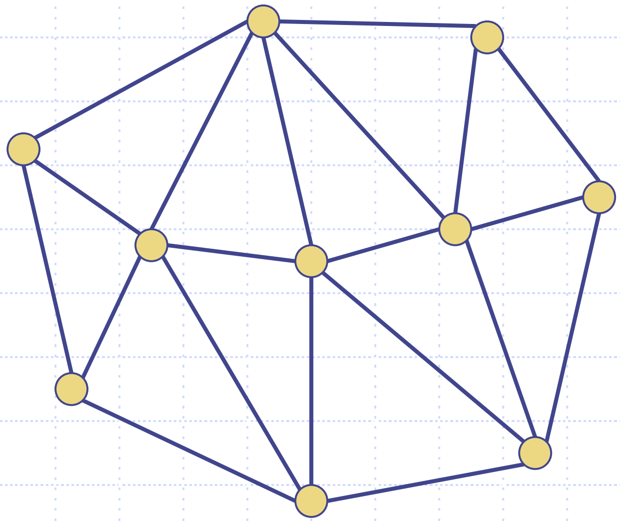
  Die Färbung von v_1 und v_2 kann nun mit Hilfe der gegebenen Farbenmengen zu einer gültigen Färbung von G erweitert werden.

Beweis von Thomassen, III

- Für |V| = 3 ist die Behauptung wahr.
- Fortsetzung des Beweises per Induktion
- 2 Fälle:



B hat eine Sehne

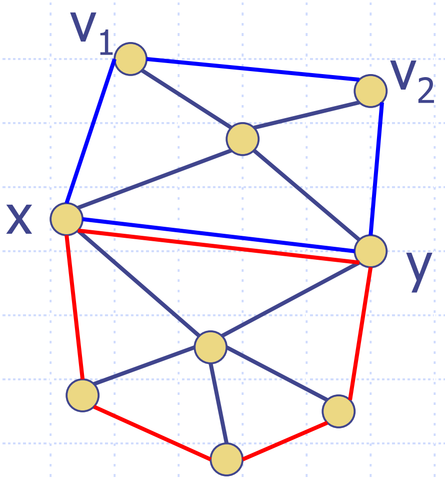


B hat keine Sehne

Beweis von Thomassen, IV

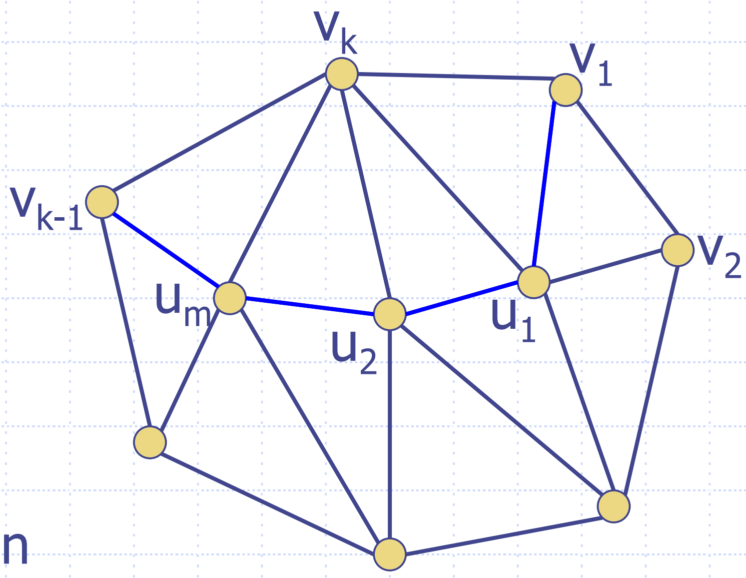
- **B hat eine Sehne {x, y}**
- {x, y} liegt auf zwei Kreisen B_1, B_2
- G_1 : von den Knoten von B_1 und aus dem Innengebiet induzierter Untergraph

  G_2 : von den Knoten von B_2 und aus dem Innengebiet induzierter Untergraph
- Der Untergraph G_1 besitzt laut Induktionsannahme eine 5-Listenfärbung.
- Da nun x und y mit Farben belegt sind, ist die Induktionsannahme auch für G_2 erfüllt, womit sich eine gültige Färbung für G ergibt.



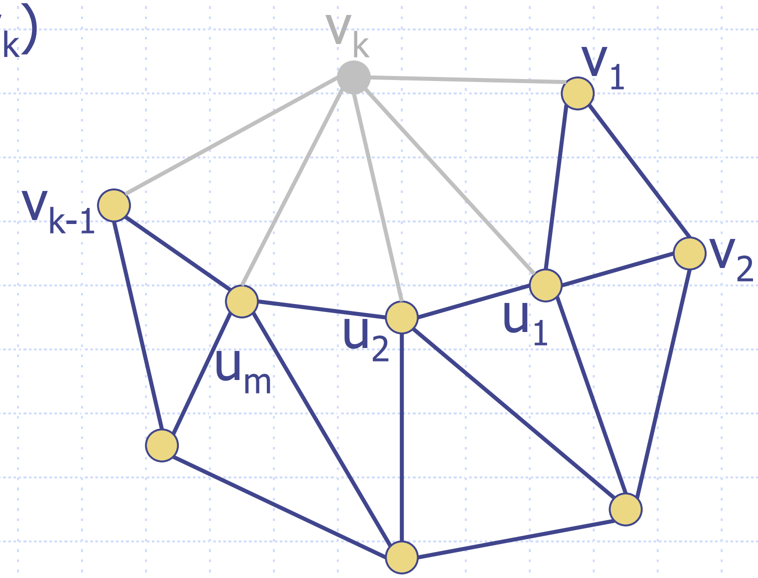
Beweis von Thomassen, V

- **B hat keine Sehne**
- Durchnummerieren der Nachbarn von v_k
- P = $v_1, u_1, \ldots, u_m, v_{k-1}$ ist ein Weg in G
- Durch Entfernen von v_k und allen inzidenten Kanten erhalten wir den Graphen G´



Beweis von Thomassen, VI

- $|C(v_k)| \geq 3$, daher gibt es mindestens 2 Farben γ, δ in $C(v_k)$ welche ungleich $c(v_1)$ sind
- γ, δ werden aus allen Listen $C(u_i)$ entfernt
- G´erfüllt nun die Induktionsannahme und ist daher 5-listenfärbbar
- γ oder δ stellt eine gültige Färbung für v_k dar, womit sich eine gültige Färbung für G ergibt

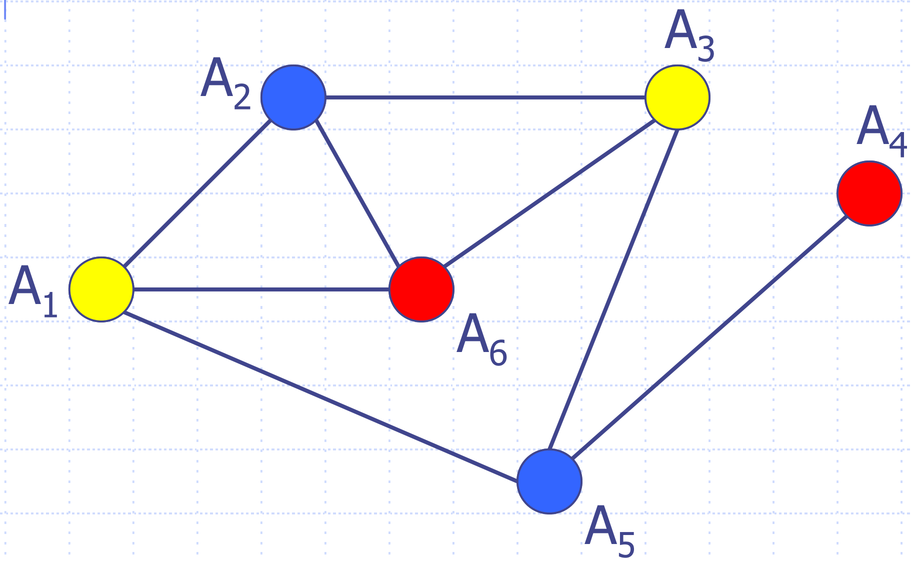


Agenda

- Einleitung
- Definitionen
- Färben von Landkarten
- **Anwendungsbeispiele**
- Algorithmen

Aufgabenplanung

- Aufgaben A_i, wobei einige Aufgaben nicht parallel abgearbeitet werden können
- Aufgaben -> Knoten
- Konfliktäre Aufgaben werden durch Kanten verbunden



Aufgaben „gleicher Farbe“ können parallel abgearbeitet werden.

Transaktionsverwaltung

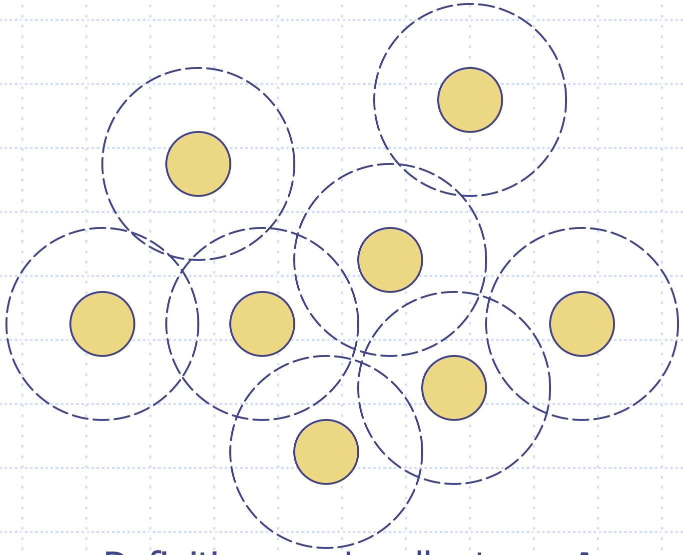
- Die Transaktionsverwaltung eines Datenbankmanagement-Systems (DBMS) versucht möglichst viele Transaktionen parallel auszuführen.
- Transaktionen behindern sich nur dann gegenseitig, wenn sie auf dieselbe Relation zugreifen und mindestens eine der Transaktionen schreibenden Zugriff beansprucht.
- Mögliche Lösung:
  - Aufbau eines Konfliktgraphen und ermitteln einer gültigen Färbung
  - Alle Transaktionen, denen dieselbe Farbe zugeordnet wurde, können parallel ausgeführt werden
- Problem: Eine gültige Färbung ist im Allgemeinen schwer zu ermitteln. Daher werden in der Praxis Sperrverfahren verwendet.

Weitere Beispiele

- Andere Anwendungen denkbar:
  - Ermitteln eines Stundenplans für eine Hochschule
    - Vorlesungen = Knoten
    - Vorlesungen, die nicht parallel stattfinden sollen, werden durch Kanten verbunden
  - Maschinenplanung
  - Auftragsplanung
  - Personalplanung
  - ...

Mobilfunk

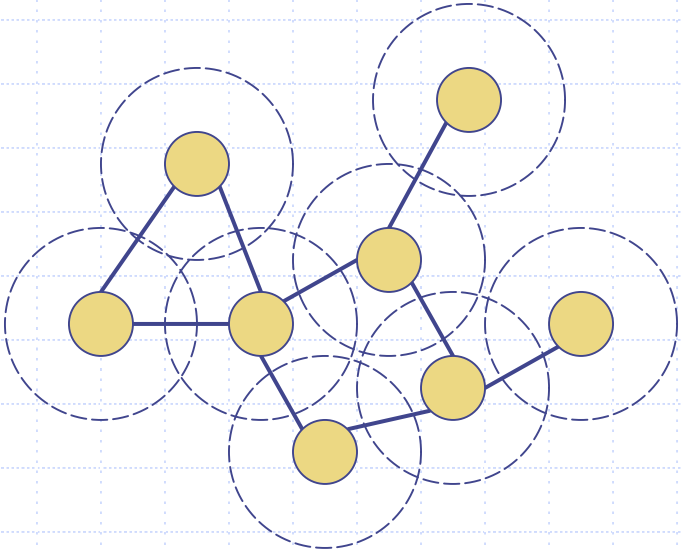
- Jede Basisstation deckt einen gewissen Funkbereich ab
- Mehrere Funkbereiche (unterschiedlicher Basisstationen) können sich überlappen
- Überlappen sich mehrere Funkbereiche, so dürfen die zugehörigen Basisstationen nicht dieselben Frequenzen verwenden, da es sonst aufgrund von Interferenzen zu Störungen kommt



Wieviele Frequenzen muss jede Basisstation zur Verfügung haben, damit es keine Störungen gibt?

Mobilfunk

- Lösung
  - Transformation in einen Konfliktgraph
  - Ermittlung einer (minimalen) Listenfärbung



Agenda

- Einleitung
- Definitionen
- Färben von Landkarten
- Anwendungsbeispiele
- **Algorithmen**

Allgemeines

- Das Färben eines Graphen ist im Allgemeinen ein schwieriges Problem
- Bereits das (scheinbar) einfache Entscheidungsproblem

  „Gegeben ist ein Graph G = (V, E), gilt $\chi(G) \leq 3$?"

  ist NP-vollständig.

Unter der Annahme P ≠ NP gibt es keinen Algorithmus, der die chromatische Zahl eines beliebigen Graphen in polynomialer Zeit berechnet.

Planare Graphen

- Für planare Graphen liefert der Beweis der Vier-Farben-Vermutung einen Algorithmus, der planare Graphen mit höchstens 4 Farben in einer Laufzeit von O $(|V|^2)$ färbt.

Backtracking-Verfahren

- Systematisches Ausprobieren aller möglichen Farbzuordnungen
- Exponentielle Laufzeit
  - Bsp.: 5 Farben, n Knoten
  - $n = 5$ $5^5 = 3125$ mögliche Farbzuordnungen
  - $n = 10$ $5^{10} = 9.765.625$ mögliche Farbzuordnungen
  - $n = 50$ $5^{50} \approx 9 * 10^{34}$ mögliche Farbzuordnungen

- In der Praxis nur bei sehr kleinen Fragestellungen anwendbar.
  (FH Wedel: etwa 300 Vorlesungen $\Rightarrow$ $n \approx 300$)

Greedy-Verfahren

- Approximativer Färbungsalgorithmus
- Effizient, liefert aber nicht immer eine optimale Lösung
- Laufzeit: $O(\Delta\, n)$ Δ : maximaler Eckengrad
  n : Anzahl Knoten
- verwendet maximal
  - c Farben, wobei c die kleinste ganze Zahl grössergleich $\sqrt{2m}$ ist (m = Anzahl Kanten)
  - $\Delta + 1$ Farben (Δ = maximaler Eckengrad)

Johnson-Algorithmus

- Verfeinerung des Greedy-Algorithmus
- Laufzeit: $O(|V|^2)$
- Für einen ungerichteten Graphen G erzeugt der Johnson-Algorithmus eine Färbung, die maximal

$$\frac{3n \log(\chi(G))}{\log n}$$

Farben verwendet.

Vielen Dank für Euer Interesse.