Berechnung der K-Zusammenhangswahrscheinlichkeit mittels Dekomposition

Robert Siegfried

Hochschule Mittweida (FH)
Kurzvortrag Zuverlässigkeitstheorie

31. Mai 2005

Ziel

Berechnung der K-Zusammenhangswahrscheinlichkeit eines ungerichteten Graphen durch wiederholte, rekursive Anwendung der Dekomposition bis die K-Zusammenhangswahrscheinlichkeiten der entstandenen Graphen leicht direkt ermittelt werden können.

Grundlagen

- $G = (V, E) \ldots$ ungerichteter Graph, $|V| = n$, $|E| = m$, $K \subseteq V$
- Dekomposition: $R_K(G) = p_e R(G/e) + (1 - p_e) R(G - e)$
- Darstellung der *Dekompositionsfolge* durch einen Binärbaum
- Vollständige Anwendung der Dekomposition liefert 2^m Blätter und entspricht der vollständigen Enumeration aller möglichen Zustände des Graphen.
- Die Berechnung von $R_K(G)$ für allgemeine Graphen ist NP-hart.
- Sind Kantenauswahl und sp-Reduktionen in polynomialer Zeit möglich, so ist die Anzahl der Berechnungen proportional zu der Anzahl der Blätter im Baum.

$\Rightarrow$ Ein optimaler Baum hat minimale Blattanzahl!

Wir werden zeigen:

- Die Anzahl der Blätter in einem optimalen Baum ist gleich der Domination des Graphen.
- Die rekursive Anwendung der Dekomposition liefert einen optimalen Baum, gdw. jeder erzeugte und (evtl.) reduzierte Graph ein K-Graph ist. Desweiteren besitzt jeder komplexe Graph G eine Kante, so dass G/e und $G - e$ beide K-Graphen sind.

$\Rightarrow$ Dekompositionsalgorithmus FACT, welcher immer einen optimalen Baum liefert.

Begriffe und Notationen

K-Baum	Minimaler Baum in G, so dass alle Knoten aus K verbunden sind.
K-Graph	Graph G, wobei jede Kante in mindestens einem K-Baum von G enthalten sein muss.
Formation	Menge von K-Bäumen eines K-Graphen G, deren Vereinigung G ergibt. gerade Formation: Anzahl der K-Bäume ist gerade ungerade Formation: Anzahl der K-Bäume ist ungerade
$D_K(G)$	Domination (absolute Differenz zwischen der Anzahl der geraden und ungeraden Formationen eines K-Graphen G)

trennender Knoten, nicht-trennbarer Graph, sp-reduzierbarer Graph, komplexer Graph

Eigenschaften der Domination

Satz 1

Sei G ein K-Graph. Dann gilt: $D_K(G) = D_K(G/e) + D_K(G - e)$

Beweis.

Lang, hier nicht von Interesse. □

- Satz 1 kann rekursiv angewendet werden: Abbruch, falls G ein Baum ist ($D_K(G) = 1$) oder falls G nicht zusammenhängend ist ($D_K(G) = 0$).
- Während dieses Rekursionsprozesses können sp-Reduktionen durchgeführt werden (aufgrund der Invarianz von $D_K(G)$).
- Anzahl der Blätter im Binärbaum ist mindestens $D_K(G)$.
  $\Rightarrow$ Ein optimaler Baum enthält genau $D_K(G)$ Blätter.

Charakterisierung von K-Graphen

Ziele:

1. $D_K(G) \neq 0$, falls G ein K-Graph ist
2. $D_K(G)$ ist invariant bzgl. sp-Reduktionen

Lemma 2

Ein zusammenhängender Graph G ohne Schlingen ist kein K-Graph bzgl. einer Menge K mit $|K| \geq 2$, gdw. er einen trennenden Knoten v besitzt, so dass $G - v$ eine Komponente ohne Knoten aus K besitzt.

Lemma 3

Sei G ein K-Graph. Dann gilt: Für jede Kante $e \in E(G)$ ist mindestens einer der Graphen G/e und $G - e$ ein K-Graph.

Lemma 4

$D_K(G) \neq 0 \Leftrightarrow G$ *ist ein K-Graph.*

Serien-/Parallelreduktion

- Wichtig, um die Größe der entstehenden Graphen zu reduzieren
- Effizienz der Dekomposition beruht auf der Möglichkeit, sp-Reduktionen durchführen zu können

Lemma 5

Sei G ein K-Graph bzgl. einer Menge K. Dann gilt:

1. e_1, e_2 *parallele Kanten* $\Rightarrow$
   $D_K(G - e_1) = D_K(G - e_2) = D_K(G)$.
2. e_1, e_2 *serielle Kanten* $\Rightarrow D_K(G/e_1) = D_K(G/e_2) = D_K(G)$.

Folgerung: $D_K(G)$ ist invariant gegenüber Serien- und Parallelreduktionen.

Der Dekompositionsalgorithmus

Lemma 6

Sei G ein komplexer und nicht-trennbarer K-Graph. Falls $|K| < |V|$, dann enthält G einen Knoten $v \notin K$, so dass $G - v$ wiederum ein K-Graph bezüglich K ist.

Satz 7

Sei G ein komplexer K-Graph mit $D_K(G) > 1$. Dann besitzt G eine Kante e, so dass $D_K(G/e) \neq 0$ und $D_K(G - e) \neq 0$.

Satz 8

Sei G ein K-Graph bzgl. einer Menge K. Dann gilt: $D_K(G) = 1 \Leftrightarrow$ G ist ein Baum oder sp-reduzibel bezüglich K.

Der Dekompositionsalgorithmus

Lemma 9

Die Anzahl der Blätter im von FACT erzeugten Binärbaum ist gleich $D_K(G)$.

Lemma 10

Sei G ein K-Graph. Dann beträgt die Laufzeit von FACT $O((m+n)D_K(G))$ und der Speicherplatzbedarf $O((m-n+1)|G|)$.

Satz 11

Ist G ein vollständiger Graph mit $|K| \geq 2$, so gilt $D_K(G) = (|K|-1)(n-2)!$.

Fragen?

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.